

## Staffan Rösby's problem

### Inhägnat markområde med staket

Staffan Rösby har föreslagit följande lösning:

Låt staketet vara en del av en cirkel med radien  $r$ . Halva arean utgörs då

av en cirkelsektor med vinkeln  $\frac{p}{3}$ . Vi får  $\frac{pr^2}{6} = 1250\sqrt{3}$   $r = \sqrt{\frac{7500\sqrt{3}}{p}}$ .

Staketets längd  $\frac{p}{3} \cdot \sqrt{\frac{7500\sqrt{3}}{p}} \approx 67,3$  m

### Rullbandet

Om hastigheten är  $\leq 1$  m/s kan Nisse inte ta sig fram på rullbandet i motsatt riktning.

Vi undersöker om/när de kommer fram samtidigt.

$a$  = rullbandets längd (m)       $x$  = Lisas hastighet (m/s)

$$\frac{3a}{x} = \frac{2a}{x+1} + \frac{a}{x-1} \quad x = 3$$

Om hastigheten är 3 m/s kommer båda fram samtidigt.

I intervallet  $1 < \text{hastigheten} < 3$  (m/s) kommer Lisa först.

Om hastigheten är  $> 3$  m/s kommer Nisse först- (Vi får förutsätta att de inte springer fortare än Usain Bolt. Vid mycket höga hastigheter kommer de fram i princip samtidigt)

### Shejk Abdullahs söner

När den äldste sonen har fått sin andel, återstår hälften av säckens innehåll.

När den näst äldste fått sin andel, återstår en tredjedel osv.

Generellt: När son nr  $n$  har tagit sin andel, återstår  $1/(n+1)$

Antag att det från början fanns  $x$  dinarer i säcken.

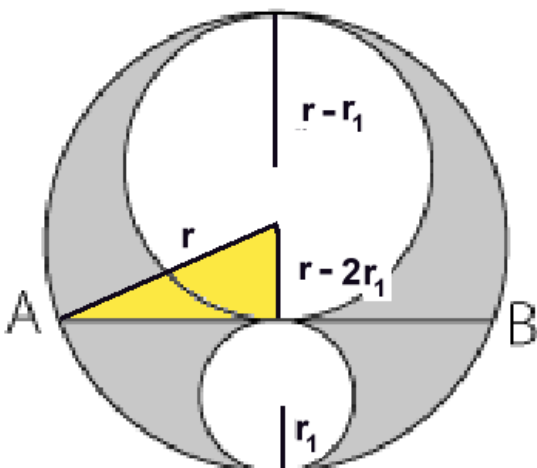
$$\text{Ekv.: } x/(n(n-1)) - x/(n(n+1)) = 200$$

$$x/(n+1) = 18200$$

$$n = 14 \quad \text{Säcken vägde närmare 2 ton(?)}$$

Svar: Shejken har 14 söner

### Arean av det skuggade området



När arean av det skuggade området är  $2\pi$  a.e., är sträckan AB alltid 4 i.e. oberoende av cirkelns storlek.

Radiernas beaktningar enligt figur

$$\pi(r^2 - r_1^2) - (r - r_1)^2 = 2\pi \quad (1)$$

Pytagoras sats på den gula triangeln

$$(r - 2r_1)^2 + (AB/2)^2 = r^2 \quad (2)$$

Efter förenkling får man

$$AB/2 = \sqrt{4}$$

$$AB/2 = 2$$

$$AB = 4$$

Svar: AB är 4 i.e.

## Hur gammal är prästen?

Om man delar upp 2450 i faktorer får man

$$1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7$$

Det gäller sedan att bilda tre åldrar med dessa faktorer.

Kantorn vet deras sammanlagda ålder (hans egen dubbla ålder) men kan ändå inte säga hur gammal var och en av besökarna är. Det måste betyda att det finns två alternativ.

Endast om den sammanlagda åldern är 64, finns det två alternativ: 5, 10, och 49 resp. 7, 7 och 50 år.

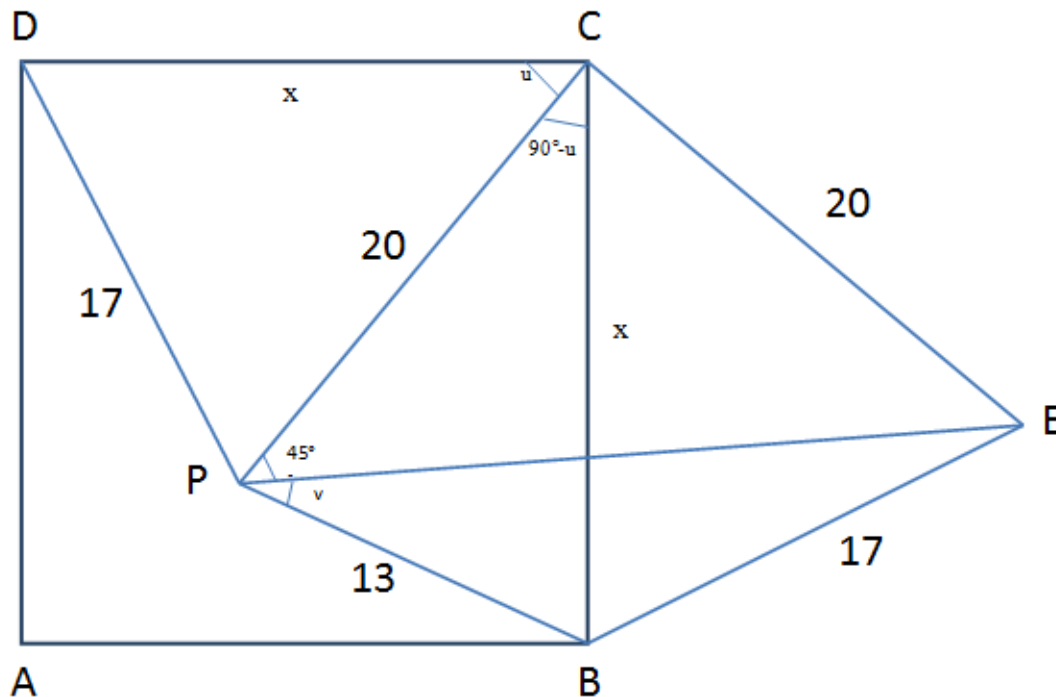
När prästen säger att han är äldst, måste han vara 50 år, om kantorn ska kunna utesluta ett av alternativen.

Svar: Prästen är 50 år och besökarna 5, 10 och 49 år.

## Beräkna kvadratens sida

Staffan Rösby har föreslagit följande lösning:

Beräkna kvadratens sida och var punkten P ligger.



Lösning: Roter triangeln CDP  $90^\circ$  moturs runt C. Då är vinkel ECP =  $90^\circ$ . Pythagoras sats ger  $PE = 20\sqrt{2}$ . Vinkel CPE =  $45^\circ$ . Bestäm vinkeln EPB med cosinussatsen. Bestäm sedan sidan CB med cosinussatsen.

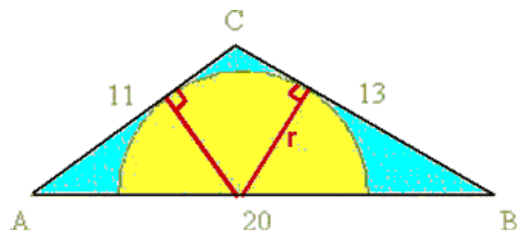
$17^2 = 13^2 + (20\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 13 \cdot 20\sqrt{2} \cos v$  ger  $\cos v = \frac{17\sqrt{2}}{26}$ . För att få exakt värde på  $\cos(v + 45^\circ)$

beräknar vi  $\sin v$ .  $\sin v = \sqrt{1 - \left(\frac{17\sqrt{2}}{26}\right)^2} = \frac{7\sqrt{2}}{26}$ .

$\cos(v + 45^\circ) = \cos v \cdot \cos 45^\circ - \sin v \cdot \sin 45^\circ = \frac{17\sqrt{2}}{26} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{7\sqrt{2}}{26} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{5}{13}$

$x^2 = 20^2 + 13^2 - 2 \cdot 20 \cdot 13 \cdot \frac{5}{13} = 369$ . Kvadratens sida är  $\sqrt{369}$ .

## Beräkna halvcirkelns diameter



Arean av triangeln kan beräknas på två sätt:

I.  $11 \cdot r / 2 + 13 \cdot r / 2 = 12 r$

II. Herons formel  $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

a, b och c är triangelns sidor och p = triangelns halva omkrets

$$p = 22 \quad a = 13 \quad b = 11 \quad c = 20$$

$$\sqrt{22(22-13)(22-11)(22-20)} = 66$$

Ekv.:  $12 r = 66 \quad r = 5,5 \quad \text{Svar: Halvcirkelns diameter är } 11 \text{ l.e}$

## Tomten och renen Rudolf

Antag att tomtens hastighet är x km/min och Rudolfs y km/min.

Antag att tomten springer 1 km på a min och Rudolf på (a - 2) min

Det ger ekvationssystemet

$$ax = 1$$

$$ax = y(a - 2)$$

Efter förenkling får man  $y = \frac{x}{1 - 2x} \quad (1)$

Tomten och Rudolf har sprungit sammanlagt 10 km, när de möts

$$\text{Ekv.: } 20x + 18y = 10$$

$$10x + 9y = 5 \quad (2)$$

Ekvation (1) och (2) ger efter förenkling

$$x^2 - 1,45x + 0,25 = 0$$

Av lösningarna till denna andragradsekvation är det bara  $x = 1/5$  som duger

$x = 1/5$  insatt i ekv. (1) ger  $y = 1/3$

Svar: Tomtens hastighet var  $1/5$  km/min och Rudolfs  $1/3$  km/min

För vilka heltal  $a$  har ekvationen  $x^3 - a^2x - 2015 = 0$  minst en heltalslösning?

$$x^3 - a^2x - 2015 = 0$$

$$x(x^2 - a^2) = 2015$$

$$x(x + a)(x - a) = 5 \cdot 13 \cdot 31$$

Det innebär att det gäller att undersöka om något heltal  $a$  ger de tre faktorerna 5, 13 och 31 i vänstra ledet.

Ett annat alternativ är att två av faktorerna 5, 13 och 31 är negativa.

Alt. 1 ( $x > 0$ ):  $x = 5, 13$  och  $31$  ger ingen lösning.

Alt. 2 ( $x < 0$ ):

$x = -13$  ger två alternativ

$$a = 18 \quad (-13)(-13 + 18)(-13 - 18) = (-13) \cdot 5 \cdot (-31)$$

$$a = -18 \quad (-13)(-13 - 18)(-13 + 18) = (-13)(-31) \cdot 5$$