Vi vill beräkna summan

$$\sum_{n=1}^{N} n(2n-1) = 2\sum_{n=1}^{N} n^2 - \sum_{n=1}^{N} n \tag{1}$$

Bilda

$$\sum_{n=1}^{N}(n+1)^2 - \sum_{n=1}^{N} n^2 = 2\sum_{n=1}^{N} n + \sum_{n=1}^{N} 1 = 2\sum_{n=1}^{N} n + N = (N+1)^2 - 1 \tag{2}$$

I vänsterledet tar alla termer utom två ut varandra, vilket ger sista ledet. Mellanleden följer från utveckling av $(n+1)^2$. Då får vi

$$\sum_{n=1}^{N} n = \frac{1}{2}[(N+1)^2 - 1 - N] = \frac{(N+1)N}{2}. \tag{3}$$

På samma sätt beräknar vi

$$\sum_{n=1}^{N}(n+1)^3 - \sum_{n=1}^{N} n^3 = 3\sum_{n=1}^{N} n^2 + 3\sum_{n=1}^{N} n + \sum_{n=1}^{N} 1 = 3\sum_{n=1}^{N} n^2 + \frac{3(N+1)N}{2} + N = (N+1)^3 - 1 \tag{4}$$

Det följer

$$\sum_{n=1}^{N} n^2 = \frac{1}{3}[(N+1)^3 - 1 - \frac{3(N+1)N}{2} - N] = \frac{2N^3+3N^2+N}{6} = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} \tag{5}$$

Då får vi

$$2\sum_{n=1}^{N} n^2 - \sum_{n=1}^{N} n = \frac{2N^3+3N^2+N}{3} - \frac{(N+1)^2-1-N}{2} = \frac{4N^3+3N^2-N}{6} = \frac{N(N+1)(4N-1)}{6} \tag{6}$$