Ekvationen är ekvivalent med

$4x(x-7)=4y^2 \Leftrightarrow (2x)^2-2\cdot 7\cdot(2x)=(2y)^2 \Leftrightarrow (2x)^2-2\cdot 7\cdot(2x)+7^2=(2y)^2+7^2 \Leftrightarrow (2x-7)^2=(2y)^2+7^2$. Ekvationen kan alltså skrivas $z^2-w^2=7^2$, där $z=2x-7$ och $w=2y$. Om 7 delar z, så delar 7 också w^2, och eftersom 7 är ett primtal, så delas w av 7. Omvänt, om 7 delar w, så delas z av 7. Talet 7 delar alltså antingen både z och w eller ingen av dem. Antag först att 7 delar båda talen. Då är $z=7m$ och $w=7n$ för några heltal m och n. Ekvationen övergår i $m^2-n^2=1$. Enligt konjugatregeln får man $(m-n)(m+n)=1$, vilket ger att $m-n=m+n=\pm 1$. Detta ger bara lösningarna $(m,n)=\pm(1,0)$, dvs $(z,w)=\pm(7,0)$. Detta ger att $(x,y)=(0,0)$ eller $(x,y)=(7,0)$. Antag nu att 7 varken delar z eller w. Då kan det inte finnas något primtal, som delar både z och w. Antag att något udda primtal p delar både $z-w$ och $z+w$. Då delar p talen $z+w+z-w=2z$ och $z+w-(z-w)=2w$, av vilket det följer att p delar både z och w, vilket är en motsägelse. Primtalet 2 kan heller inte dela $z \pm w = 2x-7\pm 2y$, eftersom dessa tal är udda. Talen $z+w$ och $z-w$ är alltså relativt prima. Eftersom $(z+w)(z-w)=7^2$, så måste det på grund av entydig primfaktorisering därför gälla att $(z+w,z-w)$ är någon av $(49,1)$, $(-49,-1)$, $(1,49)$ och $(-1,-49)$. Detta ger de fyra lösningarna $(2x-7,2y)=(z,w)=(\pm 25,\pm 24)$, dvs (x,y) är någon av $(16,\pm 12)$ och $(-9,\pm 12)$. Ekvationen har alltså sex olika heltalslösningar, men bara $(16,12)$ i positiva heltal.

Kjell Elfström