”Den förtrollade dammen” – och andra problem som stimulerar eleverna att hitta kreativa lösningar.

Vi vet från enkätundersökningar att våra elever tycker att matematik är ett viktigt ämne, men vi känner också till att många elever anser att matematik är både svårt och tråkigt.
Det finns därför anledning att fråga sig hur dagens matematikundervisning fungerar.

Är det så att matematiken har blivit mera trivial, när vi satsar all vår energi på att se till att så många elever som möjligt lämnar grundskolan med godkänt betyg i matematik?
Personligen tycker jag att det är bra att matematik tillsammans med svenska och engelska har fått en sådan särställning, men det finns också en risk att vi som lärare lägger ner för mycket energi på att lära eleverna ”standardlösningar” för att klara NP så att vi inte får tid till sådana uppgifter, som utmanar elevernas fantasi.

Eller annorlunda uttryckt:
Ägnar vi oss för mycket åt ”mängdträning”, när vi precis som i idrottssammanhang också behöver kvalitet i träningen?
Enligt min uppfattning måste varje matematiklektion innehålla problem, som stimulerar eleverna att hitta kreativa lösningar.
Under de första skolåren visar eleverna en spontan nyfikenhet, något som man ofta saknar, när eleverna blir äldre, men jag tror ändå att **nyfikenheten hos elever på alla stadier kan väckas med ett intressant problem**

Låt mig ta ett exempel som Gunnel, skolans områdessekreterare, gav mig för några år sedan.

Den förtrollade dammen

En gammal dam var på väg till kyrkogården för att sätta blommor på tre gravar. När hon kom till den första graven, upptäckte hon en liten damm. Hon doppade blommorna i dammen och när hon tog upp dem, hade hon dubbelt så många blommor - det var en förtrollad damm!
Hon satte några blommor på den första graven och gick vidare till nästa grav. Där fanns det också märkligt nog en damm! Hon doppade blommorna i dammen och när hon tog upp dem, hade antalet blommor fördubblats. Hon satte några blommor på graven och fortsatte sedan till den tredje graven. Även där fanns det en förtrollad damm. Än en gång fördubblades antalet blommor, när hon doppade dem i dammen.
Den gamla damen satte nu alla sina återstående blommor på den tredje graven.
Hur många blommor hade hon från början?
Hur många blommor satte hon på varje grav?
(Hon hade faktiskt utan att tänka på det satt lika många blommor på varje grav.)

Jag hann precis sätta upp en ekvation innan konferensen började, men fick inte tid att lösa den, men nästa dag presenterade jag min lösning för Gunnel.
Ja, det stämmer! sade hon.
Men vet du, sade jag, att det är inte den enda lösningen?? Det finns tvärtom **oändligt** många lösningar till det här problemet!
Nej, det kände hon inte till och så berättade hon bakgrunden till problemet.

Hon hade växt upp på en bondgård och när hon var i 10-årsåldern byggde man om ladugården. Det visade sig att byggmästaren var otroligt intresserad av matematiska problem och så fort han fick se Gunnel ropade han: Vänta, så ska du få ett matteproblem! Ett av dem var ”Den förtrollade dammen” .

Jag har prövat att låta eleverna i åk 7 byta ut ett par uppgifter på veckoläxan mot det här problemet och de flesta eleverna blir fascinerade av uppgiften och försöker verkligen hitta en lösning. Många gånger blir också hela familjen engagerad. På det här stadiet hittar man nästan alltid lösningen genom att testa olika ingångsvärden. Det tror jag också att ännu yngre elever skulle kunna klara – Gunnel gjorde ju det som 10-åring!
Men problemet skulle också mycket väl kunna ges till gymnasieelever!
Deras uppgift blir då att hitta en generell lösning.

En allmängiltig lösning
Antag att hon hade med sig x blommor och att hon satte y blommor på varje grav.

När hon lämnade
a) den första graven hade hon 2x-y blommor
b) den andra graven hade hon 2(**2x-y**)-y blommor
c) den tredje graven hade hon 2(**2(2x-y)-y**)-y blommor
men vi vet också att hon inte hade några blommor kvar!

Det ger oss ekvationen: **2(2(2x-y)-y)-y = 0** $\boxed{x = 7y/8}$

Heltalslösningar kräver att y är en multipel av 8.
Den enklaste lösningen är därför x = 7 och y = 8
Allmänt gäller att **x = 7 * n och y = 8 * n n = 1, 2, 3…**

Lösningen x=7 och y=8 är den lösning som eleverna i åk 7 brukar hitta.
När Gunnel hade kommit fram till den lösningen, sprang hon glad i hågen till byggmästaren och berättade att hon visste svaret.
Byggmästaren svarade:
- Ja, det är riktigt, men om den gamla damen istället fick 10 gånger så många blommor, när hon doppade ner dem i dammen: Vad skulle svaret bli då??
Det klarade inte Gunnel, men så är ju den uppgiften också avsevärt mycket svårare, dvs. såvida man inte kan hitta en generell lösning!

Vi ska se hur en sådan allmängiltig lösning ser ut:
Låt f ange faktorn vid dammförtrollningen (f = 2 betyder en fördubbling)

I det ursprungliga problemet såg ekvationen ut så här: **2(2(2x-y)-y)-y = 0**
De tre tvåorna visar att vi hade en fördubbling vid varje damm. I den generella lösningen byter vi ut tvåorna mot variabeln **f**.
Ekvationen kommer då att se ut så här: **f Ÿ(f Ÿ (f Ÿx-y)-y)-y = 0**

Antal blommor från början: $n(f^2 + f + 1)$ n = 1, 2, 3....
Antal blommor på varje grav: n Ÿ f^3 n = 1, 2, 3....

(Om f = 10, skulle den enklaste lösningen vara, att den gamla damen hade med sig 111 blommor. På varje grav skulle hon då sätta 1000 blommor. Utan tvekan är det svårare att hitta den lösningen, när man provar olika ingångsvärden!)

Kreativitet

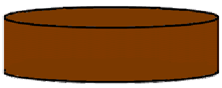
Kreativitet är en oerhört viktig egenskap, när man skall lösa matematiska problem. **Erfarenhet** av problemlösning är också en stor fördel – under förutsättning att man **samtidigt** är beredd att **tänka i nya banor.** Annars är risken stor att man tänker slentrianmässigt, när man tycker sig känna igen en uppgift.

Låt oss ta ett exempel:
Talmönstret

18 11 1 5 4 9 16 ?

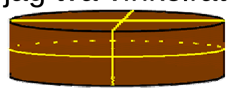
De sju talen bildar ett mönster. Vilket tal kan ersätta frågetecknet?
Det ligger nära till hands att förtvivlat leta efter ett matematiskt samband, för det är ju så det brukar vara i den här typen av uppgifter, men i det här fallet är talen ordnade i bokstavsordning!
Det går därför bra att fortsätta med t.ex. något av talen 3, 7, 8 och 10.

Kakan



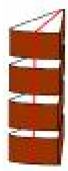
Uppg.: Dela kakan i åtta lika delar med tre snitt.

Det här problemet fick jag av en elev för några år sedan, och efter lite funderande föreslog jag två vinkelräta, vertikala snitt och ett horisontellt snitt.



Men det godtog inte eleven: Tänk om det är glasyr på kakan! Då fungerar ju inte din lösning, sa hon.

Även här gäller det att tänka i nya banor. Det är inte förbjudet att flytta de fyra bitarna, innan man gör det tredje snittet, eller hur?



Kreativitet och uthållighet

Kreativitet är en alltså en viktig egenskap, men det räcker inte alltid med att vara kreativ. Jag skulle också vilja betona att **uthållighet** är en viktig egenskap.
Jag ska ta ett exempel:

Kombinationen

Det här är en uppgift som jag har brukat ge eleverna vid flera tillfällen varje termin:
Eleverna får föreslå tre ensiffriga, tre tvåsiffriga och två tresiffriga tal.
Det gäller att kombinera de sju minsta talen så att svaret kommer så nära det största talet som möjligt.
Metod: Man får använda de fyra räknesätten och parenteser men även kvadratrötter, potenser, trigonometriska funktioner, logaritmer osv.

Här gäller det att inte ge upp för tidigt! Det har nämligen visat sig, att det nästan alltid går att hitta en kombination, som ger exakt det största talet.

Problemet har flera fördelar:
1) Man kan **anpassa kraven efter elevernas förmåga**.
I de lägre årskurserna får man kanske nöja sig med de fyra räknesätten. Den här uppgiften kan då också bli ett tillfälle att diskutera vilka räknesätt som skall prioriteras, när man har flera räknesätt i samma uppgift.
För yngre elever kan uppgiften vara att komma så nära det högsta talet som möjligt.
För duktiga elever på högre stadium kan kravet vara att avvikelsen från det givna svaret skall vara högst ±1.
2) För ovanlighetens skull **vet inte läraren hur lösningen ser ut**!

Nedanstående variant hade jag som månadens problem i juni förra året:

1	**3**	**5**	**17**	**19**	**21**	**345**	**456**

Det visade sig att det gick att komma fram till svaret 456 på flera olika sätt.

$$345 + 1 + 5 \cdot (17 + 3 + 21 - 19) = 346 + 110 = 456$$

$$345 + 5 \cdot 19 + (21 - 17)(3 + 1) = 345 + 95 + 16 = 456$$

$$345 + 17 \cdot (1 + 5) + 3^{21-19} = 345 + 102 + 9 = 456$$

$$21 \cdot 17 + 19 \cdot 5 + 3 + 1^{345} = 357 + 95 + 3 + 1 = 456$$

Problem med flera lösningar

I våra läroböcker finns det oftast bara ett tänkbart svar till en uppgift. Därför är det viktigt att man som lärare ser till att eleverna kommer i kontakt med problem som **saknar lösning eller som har flera lösningar**.

Den förtrollade dammen är ett exempel på ett problem med flera lösningar.
Vi ska titta på ytterligare ett exempel, men som introduktion ska jag först visa ett välkänt problem, som publicerades redan 1917:

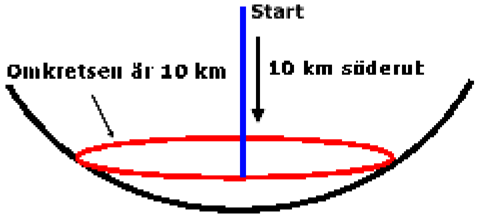
Promenaden del 1

En jägare går 10 km söder ut, sedan 10 km öster ut och slutligen 10 km norr ut.
Han är då tillbaka vid utgångspunkten.
Där skjuter han en björn.
Vilken färg har björnen?

Svar: Vit (Jägaren befinner sig vid Nordpolen. Där finns det isbjörnar.)

Promenaden del 2

År 1944 kom en variant på problemet och vid första påseendet verkar kanske problemen vara identiska:
En person går 10 km söder ut, sedan 10 km öster ut och slutligen 10 km norr ut.
Han är då tillbaka vid utgångspunkten.
Var befinner sig personen då?
Svar: Precis som i föregående uppgift kan personen vara vid Nordpolen, men det finns mycket överraskande en helt annan lösning (se nästa sida)



Personen befinner sig mycket nära **Sydpolen.** När han har gått 10 km söderut, kommer han till en parallellcirkel, vars omkrets är 10 km. När han har gått 10 km österut, har han därför avverkat ett varv runt parallellcirkel och kommer efter 10 km vandring norrut tillbaka till utgångspunkten!
Men naturligtvis fungerar det också om parallellcirkeln är t.ex. 5 km eller 2,5 km.

Teoretiskt finns det oändligt många lösningar där, där parallellcirkeln måste vara $\frac{\mathbf{10}}{\mathbf{n}}$ km

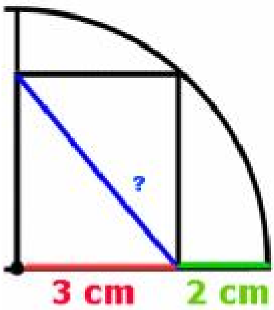
n = 1, 2, 3 …

Är inte detta också en lösning till det förra problemet?
Nej, det finns inga björnar vid Antarktis!

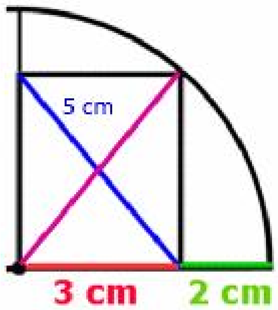
Figurer som underlättar lösningen!?

Den blå sträckan

En lämplig figur och ev. någon konstruktionslinje kan underlätta lösningen.
Ett välkänt problem ser ut så här:

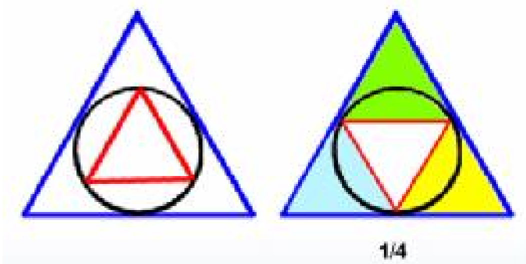


En rektangel är inskriven i en cirkelkvadrant. Hur lång är den blå sträckan?
Svar: 5 cm
Här behövs det en konstruktionslinje (se figuren till höger). Den violetta sträckan är diagonal i rektangeln och radie i cirkelkvadranten!



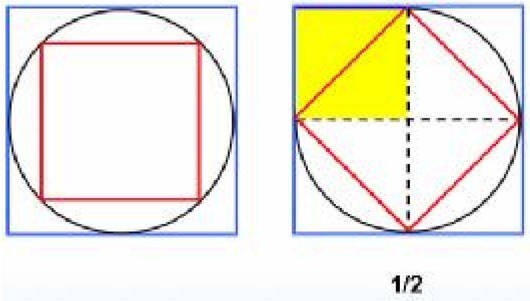
Nu kommer ett annat exempel som visar hur man kan lösa ett problem genom att förändra figuren.

Hur stor är arean av den röda triangeln jämfört med den blå triangeln?

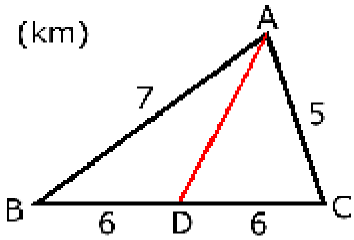


I den högra figuren har man vridit den röda triangeln. Då är det lätt att inse att arean av den röda triangeln är ¼ av den blå triangelns area.

Ett annat exempel:
Hur stor är arean av den röda kvadraten jämfört med den blå kvadraten?



Röda vägen



Hur lång är den röda vägen (sträckan AD)?
Svar: 1 km
Lösning:
Uppgiften verkar inte så enkel, tills man inser att figuren är felritad. Punkten A ligger på sträckan BC, eftersom AB + AC = BC (en s.k. degenererad triangel).
Men även när man har insett detta, är det lätt att tänka fel. Det märkte jag på de svar som jag fick, när jag hade uppgiften som månadens problem i maj 2005.

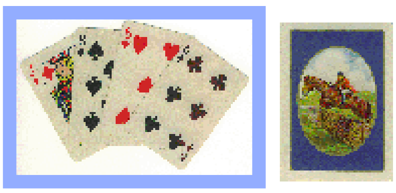
Anm.: Eftersom D är mittpunkt på BC, är den röda vägen en median.

Formeln för medianens längd ($\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$) stämmer faktiskt även i det här fallet.

Att använda formeln vore dock ett mycket krångligare sätt att lösa uppgiften.

Vilka fakta finns det/behöver jag?
Om våra elever skall bli framgångsrika problemlösare, måste de lära sig att ta reda på vilka fakta som behövs för att lösa uppgiften och vilka fakta som finns i uppgiften. Ibland kan det finnas mer information i texten än man upptäcker vid första påseendet.
Ex.:

Ett fantastiskt korttrick
En person får blanda en vanlig kortlek och sedan välja ut fem kort.
Min assistent tar hand om korten, lägger undan ett av de fem korten och visar mig sedan de fyra andra korten. Med ledning av dessa fyra kort kan jag tala om vilket det femte kortet är!!



Det femte kortet är ett av de 48 kort som jag inte ser! Kan jag verkligen få tillräcklig information från de fyra kort som jag ser för att klara tricket?
(Tricket visas i workshop 624 den 27 januari 2006)

Heinrich Hemme är fysikprofessor i Aachen. Han har gett ut flera böcker med matematiska problem. Den här boken **”Das Ei des Kolumbus”** innehåller många välkända problem, så på det sättet är den inte särskilt originell, men den har andra förtjänster:

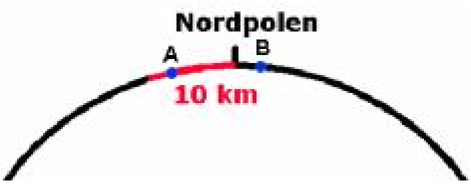
1) Det finns oftast en upplysning om var problemet först publicerades och vem som var konstruktören.
2) Till flera av problemen anges intressanta varianter.

Ett sådant exempel är

Promenaden del 3

- En forskningsresande går från sitt tält i riktning norrut.
- Efter 10 km vandring är det dags för en middagspaus.
- Därefter fortsätter han i riktning norrut.
- När han gått 10 km, är han tillbaka vid sitt tält.
- Var finns tältet?

Lösning:



Avståndet till Nordpolen är **mindre än 10 km**.
Om han startar i punkten A och äter middag i punkten B, stämmer det uppgifterna i problemet.

Ytterligare ett exempel från H. Hemmes bok:

Promenaden del 4

(Ursprungligen publicerad år 2001 i boken Denksport-Rätsel für Geniale)

- En annan forskningsresande går först 10 km i riktning norrut och därefter 5 km söderut.
- Hur stort kan då avståndet till startpunkten maximalt vara?

Svar: Det maximala avståndet är 15 km.

Lösning:
I en plangeometrisk figur är avståndet mellan två punkter en rät linje. På ett klot är avståndet mellan två punkter en storcirkelbåge.
Eftersom forskningsresanden har promenerat längs en storcirkelbåge är det maximala avståndet 15 km.

SAMMANFATTNING

Låt mig göra en sammanfattning av vad jag presenterat så här långt:

Ett intressant problem kan väcka elevernas nyfikenhet.

Det finns så mycket annat i dagens samhälle som fångar elevernas intresse, så ska matematiken kunna konkurrera, krävs det problem som stimulerar elevernas fantasi!

Kreativitet – slentrianmässigt tänkande

Vårt samhälle behöver kreativa naturvetare. Som matematiklärare kan vi stimulera elevernas kreativitet och öka deras förmåga att tänka kritiskt.

Kreativitet och uthållighet

För många av dagens ungdomar ska allting hända väldigt snabbt och häftigt. Jag ser det som en utmaning för skolan att få eleverna att bli mera uthålliga så att de kan utnyttja sina förutsättningar på rätt sätt.

Hur ser lösningen ut?

I våra läromedel finns det oftast bara ett enda svar till en uppgift.
Vi bör därför träna eleverna på problem, där det
a) finns flera lösningar eller
b) saknas lösningar eller
c) går att hitta en generell lösning

Figurer som underlättar lösningen.

En lämplig figur kan göra det mycket enklare att hitta en lösning.
Ibland kan man med hjälp av en figur lösa ett problem, som man inte rent räknetekniskt skulle klara av. Jag tänker t.ex. på bråkräkning, där våra elever numera ofta har högst begränsade kunskaper.

En typisk **målskytt i fotboll** tar vara på de få chanser som han får under en match. Jag skulle vilja göra en jämförelse med matematik:
Ibland kan det finnas en mycket enkel och helt oväntad lösning. En bra problemlösare är som målskytten. Han tar vara på möjligheten. Ändå missar vi ofta. Jag tror att det beror på att vi har förutfattade meningar om hur lösningen ser ut**.**
En liten tröst är att även riktigt stora matematiker kan missa de enkla lösningarna!

Låt mig ta ett exempel:

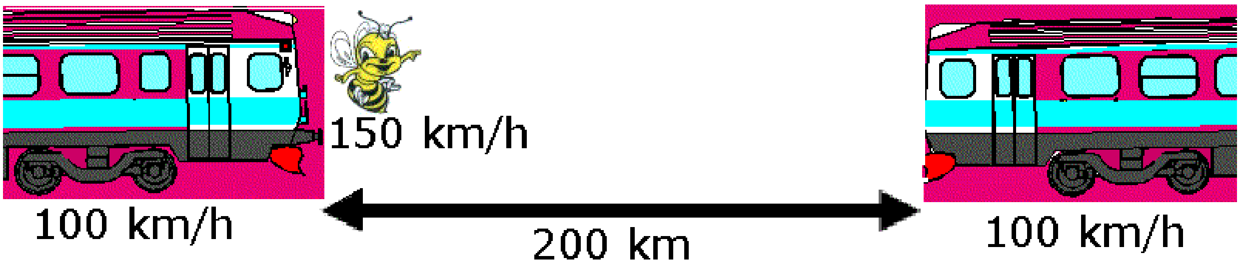
John von Neumann (1903 – 1957)

John von Neumann räknas som en av 1900-talets stora matematiker med storslagna insatser på en mängd områden:

- **Spelteori**
  Grundaren av modern ekonomisk spelteori.
- **Kvantmekanik**
  Bidrog till utvecklingen av kvantmekanik genom att använda den allra modernaste matematiken
- **Datorer**
  När de första datorerna utvecklades på 1940-talet, tillhörde John von Neumanns teorier de allra viktigaste.

Dessutom var John von Neumann extremt duktig att lösa komplicerade matematiska problem som huvudräkning.

En gång fick John von Neumann följande problem:
Två tåg på ett avstånd av 200 km startar samtidigt och kör i riktning mot varandra med en hastighet av 100 km/h. Ett bi flyger förskräckt upp framför det vänstra tåget för att komma undan. Det flyger utmed järnvägsspåret med hastigheten 150 km/h. (Ett amerikanskt bi – störst och bäst – klarar det mesta!). När biet möter det andra tåget, tvärvänder det och flyger i motsatt riktning. Resultatet blir att biet flyger fram och tillbaka mellan tågen, tills dessa möts. Då är biet fullständigt sönderstressat och faller dött till marken – en sorglig historia!
Hur lång är den sammanlagda sträcka som biet har flugit? (Ett amerikanskt bi kan både accelerera och bromsa in på nolltid.)
De sträckor som biet flyger, bildar en geometrisk serie. Man kan beräkna summan av denna geometriska serie, men det finns en mycket enklare lösning!



Svar: Biet flyger 150 km

Lösning: Tågen möts efter en timme. Därför har biet också flugit i en timme.

John von Neumann svarade efter några sekunders funderande: 150 km!
Problemställaren sade då något besviket: Jag förstår att du hittade den enkla lösningen. Du beräknade alltså inte summan av den geometriska serien.
John von Neumann: Men det var ju det jag gjorde!
Historien finns återgiven Gamow-Sterns bok ”Matematiska tankelekar”. Gamow var inte bara en briljant populärvetenskaplig författare. Han var också en världsberömd fysiker, inte minst för sin teori om Big Bang.

Årets längsta månad

Vilken månad är årets längsta månad?
Svaret finns på min hemsida **”Klurigt”** (www.eksjo.se/mathpuzzle)